
Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene
Versuch 1.5, Abteilung B



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

(29. Juni 2009)

CvL

Ziel des Versuchs

In diesem Praktikumsversuch wird die Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld untersucht. Dabei werden sowohl der **normale** und der **anomale Zeeman-Effekt** als auch der **partielle** und der **vollständige Paschen-Back-Effekt** behandelt. Ziel des Praktikumsversuchs soll ein tieferes Verständnis des Zusammenspiels von Theorie und Experiment sein. Es wird dabei der gleiche Wert auf die klassische Interpretation wie auf die quantenmechanische gelegt. Neben der Bestimmung des Verhältnisses e/m in Form des Bohrschen Magnetons μ_B sollen die Vorhersagen beider Theorien im Experiment überprüft werden.

1 Zur Vorbereitung

- Bruchrechnung ohne elektronische Hilfsmittel
- Funktionsweise eines Fabry-Pérot-Interferometers
- Nachweis von unpolarisiertem und polarisiertem Licht, insbesondere Nachweis der Drehrichtung bei zirkular bzw. elliptisch polarisiertem Licht
- Wechselwirkungen im Atom und deren Näherungen (Kopplungstypen)
- Termstruktur eines Atoms inklusive:
 - Feinstruktur
 - Multipletts / Multiplizität
 - Nomenklatur (Notation nach Russel und Saunders)
 - Auftragung nach Grotrian
- Auswahlregeln für optische Übergänge
- klassische Erklärung des normalen Zeeman-Effekts (transversaler und longitudinaler Zeeman-Effekt / Polarisation des Lichts)
- quantenmechanische Erklärung des Zeeman- und des Paschen-Back-Effekts

Aufgaben und Fragen zur Vorbereitung

1. Leiten Sie die Interferenzbedingung des Fabry-Pérot-Interferometers her.
2. Bei welchem Winkel liegt bei einem Fabry-Pérot-Interferometer die nullte Ordnung ($z=0$)?
3. Worin unterscheiden sich transversaler und longitudinaler Zeeman-Effekt?
4. Gibt es einen transversalen und longitudinalen Paschen-Back-Effekt?
5. Bei welchen Kopplungstypen tritt der Zeeman- und bei welchen der Paschen-Back-Effekt auf?
6. Welche Wechselwirkung ist für die Feinstruktur verantwortlich?
7. Betrachten Sie den Nenner des zweiten Terms der Gleichung (9) für die Triplets $3^3D_{3,2,1}$ und $2^3P_{2,1,0}$. Vergleichen Sie die Nenner beider Triplets miteinander. Welche Auswirkung hat dies auf den Paschen-Back-Effekt?
8. Vollziehen Sie Gleichung (14) nach.
(Hinweis: Drücken sie $(\hat{L}\hat{S})$ durch $\hat{J}^2 = (\hat{L} + \hat{S})^2$ aus).
9. Überlegen sie sich, welche Werte g_J im Fall des reinen Bahnmagnetismus ($S = 0$) und des reinen Spinmagnetismus ($L = 0$) annehmen müssen.

2 Literatur

- [1] E. Back, A. Landé, **Zeemaneffekt und Multipletstruktur der Spektrallinien** (erste Auflage), Verlag von Julius Springer, Berlin 1925 (Seiten 5 - 11)
- [2] H. Haken, H. C. Wolf, **Atom- und Quantenphysik** (5. Auflage), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993 (Seiten 207 -220, 303 - 313)
- [3] W. Grotrian, **Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen II** (erste Auflage), Struktur der Materie VII, Verlag von Julius Springer, Berlin 1928 (Seite 79 und 83)
- [4] T. Mayer-Kuckuck, **Atomphysik** (5. Auflage), B. G. Teubner, Stuttgart 1997 (Seiten 96 - 110, 117 - 129, 180 - 191, 199 - 201)

Die hier angegebene Literatur enthält alle wichtigen Punkte zur Vorbereitung. Die angegebenen Seiten sind als Kopie in der Literaturliste zusammengestellt. **Es wird explizit darauf hingewiesen, dass www.wikipedia.org und ähnliche Seiten keine vertrauenswürdigen Nachschlagewerke sind.** Alternativen sind z.B.:

- Stöcker, **Taschenbuch der Physik**, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt a.M.
- W. C. Martin and W. L. Wiese, **Introduction to Atomic Spectroscopy**, <http://physics.nist.gov/Pubs/AtSpec/>, National Institute of Standards and Technology, Maryland (USA)

Kein Nachschlagewerk kann jedoch das Studium weiterführender Literatur ersetzen, sondern nur den Einstieg in ein Thema erleichtern oder Dinge wieder in Erinnerung rufen.

3 Einführung¹

Bereits Faraday, der 1845 zeigte, dass sich die Polarisationssebene von Licht im magnetischen Feld dreht, vermutete eine Beeinflussung der Lichtemission durch Magnetfelder. Er konnte einen solchen Effekt mit den ihm zur Verfügung stehenden Instrumenten nicht nachweisen und beendete seine Bemühungen 1862. Ebenso erging es vielen anderen. Der Niederländer Zeeman führte 1892 ebenfalls erfolglos Versuche durch, die er Anfang 1896 ohne Erfolg wiederholte. Im selben Jahr erhielt das gut ausgestattete Labor, in dem er arbeitete, eines der begehrten Rowlandschen Konkav-Beugungsgitter. Mit diesem Präzisionsinstrument, das im Vergleich zu älteren Beugungsgittern ca. die zehnfache Auflösung hatte, und einem der stärksten verfügbaren Rühmkorffschen Elektromagneten führte er erneut Versuche durch. Diesmal beobachtete er eine deutliche Verbreiterung der Spektrallinien. Ende des Jahres ergänzte er seinen Bericht, aufgrund einer Rückfrage von Lorentz, um die Angaben zur Polarisation der Linienränder. Zeemans Angaben zufolge waren die Linienränder bei longitudinaler Beobachtung (bezüglich des Magnetfeldes) in entgegengesetzten Richtungen zirkular polarisiert, bei transversaler Beobachtung linear polarisiert.

Genau diese Polarisierungen waren nach der Theorie seines Dokortvaters Lorentz (1896) zu erwarten. Diese Theorie basiert auf der ein Jahr vorher (1895) eingeführten Lorentz-Kraft, wobei die Emission des Lichts durch die Schwingung elektrisch geladener Teilchen induziert wird, die Lorentz als „Ionen“ bezeichnete, da Elektronen noch nicht bekannt waren. Die in der Lorentzschen Theorie vorhergesagte Aufspaltung in eine Dublett- bzw. in eine Tripletstruktur und deren Polarisierungen wurden von Zeeman im Jahr 1897 bestätigt. Heute wissen wir, dass viele der von Zeeman beobachteten Linienaufspaltungen nicht der Lorentzschen Theorie entsprechen, sondern den sogenannten „anomalen Zeeman-Effekt“ zeigen. Zeeman war, nach eigenen Angaben, bei seiner Arbeit von der Lorentzschen Vorhersage so stark voreingenommen, dass er die zusätzlichen Aufspaltungen als eine sogenannte Umkehrungserscheinung, wie sie bei schwankenden Dampfdichten und Temperaturen vorkommt, interpretierte.

Eigentlich hätte der von Lorentz berechnete Effekt drei Größenordnungen kleiner sein müssen, da zu der Zeit der kleinste bekannte Bestandteil von Materie das Wasserstoff-Ion war. Zuerst gab Zeeman das Verhältnisses e/m mit ungefähr 10^{11} C/kg an, bei genaueren Messungen präzisierete er den Wert auf $1,6 \cdot 10^{11}$ C/kg. Auch mit hohen systematischen Fehlern bei der Bestimmung der Magnetfeldstärke konnten diese Abweichungen nicht erklärt werden. Vergleicht man den Wert mit dem aus Thomsons Kathodenstrahl-Experiment im Magnetfeld (1897), liegt der Schluss nahe, dass nicht die atomaren Ionen, sondern die von Thomson postulierten Elektronen für die Lichtemission verantwortlich sind. Eine weitere Übereinstimmung beider Versuche war auch das Vorzeichen der Elektronenladung, das beide als negativ angeben. Somit haben Zeemans Versuche entscheidend dazu beigetragen, die Elektronen-Hypothese zu stärken und so den Atommodellen die Grundlage zu bereiten.

¹ Informationen entnommen aus: K. Henschel, **Die Entdeckung des Zeeman-Effekts**, Phys. Bl. 52 (1996) Nr.12

Zunächst sah es so aus, als ob Experiment und Theorie in Einklang stünden, bis 1897/98 andere Experimentatoren fast gleichzeitig andere Aufspaltungen als die Triplett- und Dublett-Aufspaltungen beobachteten. Versuche, diese Beobachtungen durch Modifikationen der Lorentz'schen Theorie zu erklären, scheiterten. Erst 1925 konnte die quantenmechanische Beschreibung diesen Missstand beheben. Dennoch erhielten Zeeman und Lorentz 1902 den Nobelpreis für ihre gemeinsame Arbeit. Auch heute noch gilt ihre Arbeit als Paradebeispiel des gegenseitigen befruchtenden Einfluss von Experiment und Theorie.

Auf der Suche nach einer systematischen Beschreibung des anomalen Zeeman-Effekts war aufgefallen, dass die Spektrallinien des Orthoheliums und des Wasserstoffs nicht den erwarteten anomalen Zeeman-Effekt zeigen. Bei genauen Untersuchungen beobachteten 1912 Paschen und Back eine „magnetische Umwandlung“ des anomalen Zeeman-Effekts in den normalen, wie sie es damals interpretierte. Sie schlussfolgerten daraus, dass der normale Zeeman-Effekt allgemeingültig ist und der anomale Zeeman-Effekt nur einen Übergangseffekt darstellt, der erst noch verstanden werden muss. Erst die Quantenmechanik konnte Licht in das Dunkel bringen und zeigen, dass der normale Zeeman-Effekt und der Paschen-Back-Effekt zwar spektroskopisch gleich erscheinen, aber durch zwei unterschiedliche Mechanismen entstehen. Bereits in der ersten Veröffentlichung zum Paschen-Back-Effekt stellen beide fest, dass diese „magnetische Umwandlung“ nur an Spektrallinien-Multipletts auftritt und beschrieben diese Verwandlung unter anderem am Sauerstoff-Triplett $4^5P_{3,2,1} \rightarrow 3^5S_2$ sehr detailliert. Im Glanz des Zeeman-Effekts geht der Paschen-Back-Effekt leider etwas unter, obwohl er wesentlich zum Verständnis des Atomaufbaus beigetragen hat.

4 Theorie

4.1 klassische Erklärung des normalen Zeeman-Effekts

Wie bereits in der Einführung erwähnt, war der Aufbau des Atoms zur Zeit der Lorentz'schen Theorie noch nicht bekannt. Ebenso wenig wusste man über die Lichtemission von Atomen. Lorentz nahm deshalb an, dass für die Lichtemission ein geladenes Teilchen verantwortlich ist, das in alle drei Raumrichtungen oszilliert. Seiner Vorstellung nach musste es sich dabei um ein Ion handeln, da Elektronen noch nicht bekannt waren. Die Oszillationen dieses geladenen Teilchens nahm er als Fourier-Reihen an, die alle Frequenzen des Linienspektrums (ω_n) enthielten.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_n A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n) \\ y(t) &= \sum_n B_n \cos(\omega_n t - \beta_n) \\ z(t) &= \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \gamma_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Dieser im Raum oszillierende Ladung kann ein magnetisches Moment zugeordnet werden. Legt man ein Magnetfeld B entlang der z-Achse an, so wirkt die Lorentz-Kraft auf das geladene Teilchen. Die Kraft hat zur Folge, dass das magnetische Moment (1) anfängt um die Achse in Magnetfeld-Richtung mit der Larmor-Frequenz

$$\omega_L = \frac{-q}{2m} \cdot B \quad (2)$$

zu präzidieren. Es ergibt sich für die Bewegungsgleichung der Ladung

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) \cos(\omega_L t) - y(t) \sin(\omega_L t) \\ Y(t) &= x(t) \sin(\omega_L t) + y(t) \cos(\omega_L t) \\ Z(t) &= z(t) \end{aligned} \quad (3)$$

die nach entsprechenden Umformungen die folgende Gestalt erhält:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_n D_n \left\{ \cos\left((\omega_n + \omega_L)t - \delta_n\right) - \sin\left((\omega_n - \omega_L)t - \delta'_n\right) \right\} \\ Y(t) &= \sum_n D_n \left\{ \sin\left((\omega_n + \omega_L)t - \delta_n\right) + \cos\left((\omega_n - \omega_L)t - \delta'_n\right) \right\} \\ Z(t) &= \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \gamma_n) \end{aligned} \quad (4)$$

Dieser Form ist sehr gut anzusehen, was im Experiment zu erwarten ist. Fasst man die Oszillationen der Ladung als Hertz'schen Dipol auf und betrachtet man diese z.B. entlang der y-Achse, also **transversal** zum Magnetfeld, so sieht man

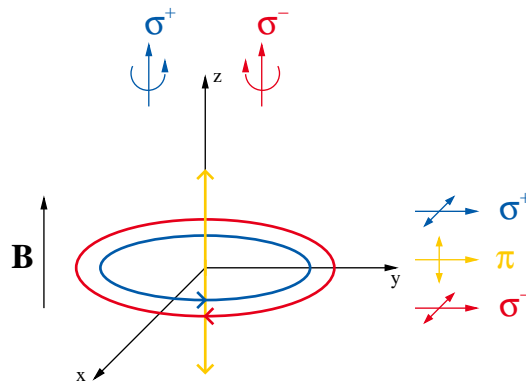


Abbildung 1: Zerlegung der „Ionen-Schwingung“ in drei Komponenten, sowie die Polarisation des Lichts bei Transversalem und Longitudinalem Zeeman-Effekt

nur das von der X- und der Z-Komponente ausgestrahlte Licht (siehe Abbildung 1). Die Y-Komponente sieht man nicht, da ein Hertzscher Dipol nicht in seine Schwingungsrichtung abstrahlen kann. Die Z-Komponente strahlt Licht mit den Frequenzen ω_n ab, die identisch mit denen ohne Magnetfeld sind. Die Polarisation dieser π -Komponente genannten Spektrallinien ist **linear und parallel** zur Richtung des Magnetfelds. Die X-Komponente liefert zwei Spektralkomponenten, die die Frequenzen $(\omega_n + \omega_L)$ und $(\omega_n - \omega_L)$ besitzen und somit leicht zu den ursprünglichen Spektrallinien verschoben sind. Diese werden als σ^+ - und σ^- -Komponenten bezeichnet, deren Polarisation **linear und senkrecht** zur Richtung des Magnetfeldes ist.

Betrachtet man das geladene Teilchen entlang der z-Achse, also **longitudinal** zum Magnetfeld, so sieht man nur die X- und die Y-Anteile der Oszillationen. Wie man der Bewegungsgleichung (4) ansieht, handelt es sich dabei um zwei Kreisbewegungen mit entgegengesetztem Drehsinn und zwei unterschiedlichen Frequenzen $(\omega_n + \omega_L)$ und $(\omega_n - \omega_L)$, wobei der mathematisch positive Drehsinn der σ^+ -Komponente zuzuordnen ist und der mathematisch negative der σ^- -Komponente. Somit sieht man nur die σ^+ - und σ^- -Komponenten der Spektrallinien, die **links- bzw. rechts-zirkular** polarisiert sind. Die π -Komponente ist aus dieser Richtung nicht zu sehen. Bei Abweichung von dieser Betrachtungsrichtung ergibt sich eine Mischform, so dass die Polarisation der σ -Komponenten elliptisch ist.

Durch den Vergleich der Theorie mit Messwerten stellt man fest, dass das Verhältnis von Ladung zu Masse genau dem des Elektrons entspricht. Somit muss es sich bei dem geladenen Teilchen um eine Elektron handeln.

$$\frac{-q}{m} = \frac{e}{m_e} \quad (5)$$

4.2 Quantenmechanische Beschreibung des Atoms

Der Hamilton-Operator eines Atoms hat die folgende Form:

$$\hat{H}_0 = \hat{T} + \hat{V}_C + \underbrace{\hat{V}_{ss} + \hat{V}_{ll} + \hat{V}_{ls}}_{\text{magn. WW}} \quad (6)$$

Dabei ist \hat{T} der Operator der kinetischen Energie inklusive relativistischer Korrektur. \hat{V}_C beinhaltet sowohl die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen mit dem Atomkern als auch die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen untereinander. Darüber hinaus gibt es drei magnetische Wechselwirkungen, wenn man den Kernspin vernachlässigt: \hat{V}_{ss} ist die Wechselwirkung der verschiedenen Elektronen-Spins ($s_i s_j$) und \hat{V}_{ll} die Wechselwirkung verschiedener Elektronen-Bahnen ($l_i l_j$). Die Spin-Bahn-Wechselwirkung \hat{V}_{ls} ist eine Wechselwirkung der einzelnen Elektronen mit sich selbst ($l_i s_i$).

Die Potentiale \hat{V}_{ss} , \hat{V}_{ll} und \hat{V}_{ls} werden dabei als Störungen des Systems $\hat{T} + \hat{V}_C$ behandelt. In der Störungstheorie wird immer nur eine Störung gleichzeitig angewendet. Daher müssen die Störungen nach ihrer Stärke sortiert werden und nacheinander auf das System angewendet werden. Daraus ergeben sich im Wesentlichen zwei Kopplungstypen. Die LS-Kopplung, auch Russell-Saunders-Kopplung genannt, und die jj-Kopplung [2].

4.2.1 LS-Kopplung

Es liegt LS-Kopplung vor, wenn die Spin-Bahn-Wechselwirkung deutlich schwächer ist als die Spin-Spin- und die Bahn-Bahn-Wechselwirkung. In diesem Fall ergibt die Spin-Spin-Wechselwirkung einen Gesamtspin S des Atoms, der sich aus den einzelnen Spins der Elektronen s_i zusammensetzt. Das gleiche gilt auch für die Bahndrehimpulse der Elektronen

l_i , die durch die Bahn-Bahn-Wechselwirkung zu einem Gesamtbahndrehimpuls des Atoms L koppeln. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung liefert einen Gesamtdrehimpuls des Atoms J , der aus der Kopplung des Gesamtspins S und des Gesamtbahndrehimpulses L entsteht. Dabei ist die Richtungsquantelung des Gesamtspins und des Gesamtbahndrehimpulses zu beachten. Im Fall, dass der Gesamtbahndrehimpuls größer oder gleich ist wie der Gesamtspin ($L \geq S$), gibt der Gesamtbahndrehimpuls die ausgezeichnete Richtung an. Durch die Richtungsquantelung ergeben sich dann $(2S + 1)$ unterschiedliche Gesamtdrehimpulse. Die Anzahl der möglichen Gesamtdrehimpulse wird Multiplizität M und die dazugehörigen Energieniveaus als Multiplett bezeichnet. Ist der Gesamtspin größer als der Gesamtbahndrehimpuls ($L < S$), vertauschen sich die Rollen beider und es gibt $(2L + 1)$ verschiedene Gesamtdrehimpulse. Die Anzahl wird dann „unvollständig entwickelte Multiplizität“ genannt.

Um den Zustand des Atoms anzugeben, benötigt man die Quantenzahlen L , S und J , wobei der Gesamtspin implizit in der Multiplizität enthalten ist. In der Spektroskopischen Notation nach Russel und Saunders wird der Zustand folgendermaßen geschrieben:

$$^{(2S+1)}L_J \quad (7)$$

Dabei wird der Gesamtbahndrehimpuls L mit den gleichen Buchstaben bezeichnet wie die Bahndrehimpulse l , nur in Form von Großbuchstaben.

Feinstruktur-Aufspaltung

Die Feinstruktur-Aufspaltung der Energieniveaus in einem Atom werden durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung verursacht, die allgemein die Form

$$\hat{V}_{ls} = \frac{1}{m_e^2 c^2} \cdot \left(\frac{d}{\hat{r} d\hat{r}} \hat{V}_c \right) \cdot (\hat{L} \cdot \hat{S}) \quad (8)$$

hat. Liegt LS-Kopplung vor, so kann der Term $\hat{L}\hat{S}$ direkt angegeben werden und es ergibt sich ein Ausdruck, aus dem der Erwartungswert berechnet werden kann. Die Energie berechnet sich dann für wasserstoffähnliche Atome zu:

$$E_{ls} = \left(\frac{g_L g_S m_e c^2 \alpha^4 Z^4}{8} \right) \cdot \left(\frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{n^3 L(L+1/2)(L+1)} \right) \quad (9)$$

Am Nenner ist direkt zu erkennen, dass die Feinstrukturaufspaltung für höhere Schalen und größere Bahndrehimpulse kleiner wird. Der Term $J(J+1)$ im Zähler liefert $(2S+1)$ bzw. $(2L+1)$ unterschiedliche Energiebeiträge, die für die Feinstrukturaufspaltung verantwortlich sind und somit ein Multiplett bilden.

4.2.2 jj-Kopplung

jj-Kopplung liegt vor, wenn die Spin-Bahn-Wechselwirkung groß gegenüber der Bahn-Bahn- und der Spin-Spin-Wechselwirkung ist. In diesem Fall koppeln Spin s_i und Bahndrehimpuls l_i eines einzelnen Elektrons zu einem Drehimpuls j_i . Diese Drehimpulse der Elektronen j_i koppeln dann zu einem Gesamtdrehimpuls J . Der Gesamtspin S und der Gesamtbahndrehimpuls L existieren nicht mehr. Somit kann nicht mehr die spektroskopische Notation der LS-Kopplung verwendet werden.

4.3 Quantenmechanische Erklärung des Zeeman- und des Paschen-Back-Effekts

Im Jahr 1920 lieferte Landé die erste quantenmechanische Erklärung des Zeeman-Effekts, die im Lauf der Zeit erweitert wurde. Damals hatte diese heute als selbstverständlich angesehene Beschreibung den Ruf eines Kunstgriffs, da sie von der Quantisierung der Bohrschen Bahnen und Einsteins Lichtquanten ausging, das Plancksche Wirkungsquantum h bei der Berechnung der Frequenzverschiebung jedoch herausfällt.

Setzt man ein Atom einem äußeren Magnetfeld aus, muss man den Hamilton-Operator des Atoms \hat{H}_0 um eine Magnetische Störung \hat{H}_B erweitert werden. Die Form diese Operators ist analog zur klassischen Beschreibung der potentiellen Energie eines Magnetischen Dipols im Magnetfelds ($E = -\vec{\mu}\vec{B}$)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_B = \hat{H}_0 - \hat{\mu}\hat{B} \quad (10)$$

Das magnetische Moment im Atom wird durch die Spins und Bahndrehimpulse der Elektronen hervorgerufen. Dabei ist es von entscheidender Bedeutung, welcher Kopplungs-Typ vorliegt. Allgemein kann das magnetische Moment als

$$\hat{\mu} = \sum_i (\hat{\mu}_{l_i} + \hat{\mu}_{s_i}) = \frac{\mu_B}{\hbar} \sum_i (g_L \hat{l}_i + g_S \hat{s}_i) \quad (11)$$

angegeben werden. g_L und g_S sind die g -Faktoren des Bahndrehimpulses und des Spins. Der g -Faktor des Bahndrehimpulses hat den Wert $g_L = 1$, für den des Spins gilt $g_S \approx 2$.

4.3.1 Zeeman-Effekt

Der Zeeman-Effekt tritt dann auf, wenn die Störung des externen Magnetfeldes klein gegen alle Wechselwirkungen im Atom ist und somit der Gesamtdrehimpuls J eine Quantenzahl ist. Das führt dazu, dass das magnetische Moment des Atom nur durch J ausgedrückt werden kann. Der Hamilton-Operator der Magnetfeldstörung erhält dann die Form:

$$\hat{H}_{Ze} = -\hat{\mu}_J \hat{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \hat{g}_J \hat{J} \hat{B} \quad (12)$$

Das Problem ist dabei, den Landéschen g -Faktor g_J zu berechnen. Im Fall der LS-Kopplung ist das ohne größeren Aufwand möglich. $\hat{\mu}_J$ setzt sich dabei aus dem magnetischen Moment des Gesamtbahndrehimpulses $\hat{\mu}_L$ und dem magnetischen Moment des Gesamtspins $\hat{\mu}_S$ zusammen, wobei berücksichtigt werden muss, dass L und S nicht unabhängig voneinander sind.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Ze} &= -\hat{\mu}_J \hat{B} \\ &= -(\hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S) \hat{B} \\ &= \frac{\mu_B}{\hbar} (g_L \hat{L} + g_S \hat{S}) \hat{B} \end{aligned} \quad (13)$$

Um diesen Term in die Form der Gleichung (12) zu bringen, bietet es sich an eine Projektion¹ auf \hat{J} einzufügen. Verwendet man noch die Bedingung $\hat{J} = (\hat{L} + \hat{S})$, die aus der LS-Kopplung resultiert, kann man den Erwartungswert von g_J bestimmen.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Ze} &= \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{(g_L \hat{L} + g_S \hat{S}) \hat{J}}{\hat{J}^2} \hat{J} \hat{B} \\ &= \frac{\mu_B}{\hbar} \left(g_L + (g_S - g_L) \frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \hat{S}^2}{2\hat{J}^2} \right) \hat{J} \hat{B} \end{aligned} \quad (14)$$

Hat das Magnetfeld nur eine z-Komponente B , reduziert sich der Term $\hat{J} \hat{B}$ auf $\hat{J}_z B$. Mit Hilfe der zeitunabhängigen Störungstheorie erster Ordnung berechnet sich der Energieeigenwert zu:

$$E_{Ze} = \mu_B B g_J M_J \quad (15)$$

$$g_J = g_L + (g_S - g_L) \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad (16)$$

Da die magnetische Quantenzahl M_J ($2J+1$) unterschiedliche Werte annehmen kann, ergeben sich dem entsprechend viele Werte für E_{Ze} . Durch das externe Magnetfeld wird somit die Entartung der Energieniveaus bezüglich M_J aufgehoben (siehe Abbildung 2).

Aus experimenteller Sicht ist die Aufspaltung der Spektrallinien interessanter als die Aufspaltung der Energieniveaus. Die Spektralaufspaltung lässt sich mit Hilfe der Gleichung (15) berechnen. Sie lautet:

$$\Delta E_{Ze} = \mu_B B \underbrace{(g_J M_J - g'_J M'_J)}_{g_{eff}} \quad (17)$$

g_{eff} ist ein Maß für die Aufspaltung der Spektrallinien. Gibt es keinen Wert für g_{eff} doppelt, so ist auch die Entartung der Spektrallinie ebenfalls vollständig aufgehoben. Die Entartung der Spektrallinien muss nicht zwangsläufig aufgehoben werden. Dies tritt zum Beispiel beim normalen Zeeman-Effekt auf. Der normale Zeeman-Effekt ist bei Singlett-Übergängen zu beobachten, so dass für beide Niveaus $S = 0$ und damit $J = L$ gilt. Die Gleichungen (15) und (17) reduzieren sich so auf

$$E_{nZe} = \mu_B B g_L M_L \quad (18)$$

$$\Delta E_{nZe} = \mu_B B g_L \Delta M_L \quad (19)$$

und es ergeben sich nur drei unterschiedliche Spektrallinien. Die π -Komponente entspricht einem Übergang mit $\Delta M_L = 0$, die σ^+ $\Delta M_L = +1$ und die σ^- $\Delta M_L = -1$. Entsprechendes gilt für den anomalen Zeeman-Effekt mit $\Delta M_J = 0, \pm 1$. Die Polarisation des emittierten Lichts entspricht der, die schon in der klassischen Erklärung erörtert wurde.

¹ Für eine Formal korrekte Herleitung sei auf [2] verwiesen.

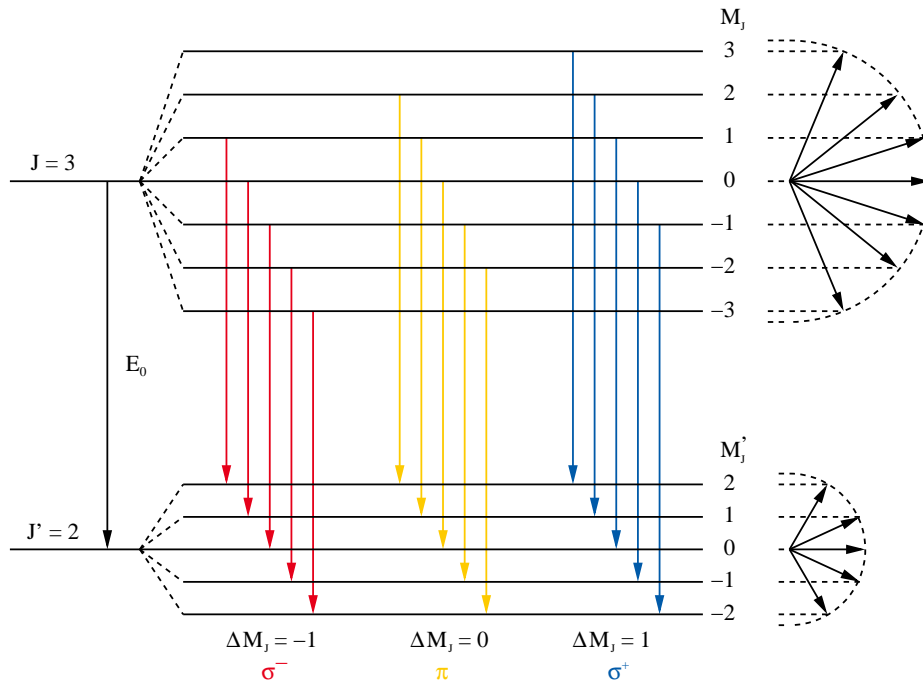


Abbildung 2: Termschema eines Übergangs von $J = 3$ nach $J' = 2$ mit der Übergangsenergie des ungestörten Systems E_0 (links), den Übergängen im Fall des Zeeman-Effekts (Mitte) und der Richtungsquantelung des Gesamtdrehimpulse J und J' (rechts)

4.3.2 Paschen-Back-Effekt

Der Paschen-Back-Effekt kann nur bei Spektrallinien-Multipletts beobachtet werden. Er tritt auf, wenn das externe Magnetfeld die Spin-Bahn-Wechselwirkung aufhebt, also Gesamtspin und Gesamtdrehimpuls getrennt voneinander mit dem Feld wechselwirken. Dabei dürfen die restlichen Wechselwirkungen im Atom nicht beeinträchtigt werden (s. Gl. (6)). Die Spin-Bahn-Wechselwirkung ist für verschiedene Energiemultipletts im Atom unterschiedlich groß (vgl. Gl. (9)), so dass die Spin-Bahn-Wechselwirkung abhängig vom Energiemultiplett bei unterschiedlichen Magnetfeldstärken aufgehoben wird. Es wird daher zwischen partiellem und vollständigen Paschen-Back-Effekt unterschieden. Beim partiellen Paschen-Back-Effekt ist die Spin-Bahn-Wechselwirkung nur bei einem der beiden Energiemultipletts aufgehoben, beim vollständigen Paschen-Back-Effekt bei beiden.

Ist die Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgehoben, gilt für den Hamilton-Operator der Magnetfeldstörung bzw. für dessen Energieeigenwert:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{PB} &= -(\hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S)\hat{B} \\ &= \frac{\mu_B}{\hbar}(g_L\hat{L}_z + g_S\hat{S}_z)B \end{aligned} \quad (20)$$

$$E_{PB} = \mu_B B (g_L M_L + g_S M_S) \quad (21)$$

Bei der Spektrallinien-Aufspaltung kann der Unterschied zwischen partiellem und vollständigen Paschen-Back-Effekt beobachtet werden. Angenommen das obere Energieniveau zeigt eine Paschen-Back-Aufspaltung und das untere eine Zeeman-Aufspaltung, dann berechnet sich die Aufspaltungsenergie des Spektrallinie zu:

$$\Delta E_{pPB} = \mu_B B [(g_L M_L + g_S M_S) - g'_J M'_J] \quad (22)$$

Dabei ist neben den Auswahlregeln für optische Übergänge zu beachten, dass es für $M_J = M_L + M_S$ mehrere Realisierungen geben kann. Ist zum Beispiel $M_J = 1$, $L = 2$ und $S = 1$, dann gibt es drei Realisierungen: $(M_L, M_S) = (0, 1)$, $(1, 0)$ und $(2, -1)$.

Zeigen beide Energieniveaus eine Paschen-Back-Aufspaltung, dann reduziert sich die Aufspaltung der Spektrallinien auf die Form

$$\Delta E_{vPB} = \mu_B B g_L \Delta M_L, \quad (23)$$

die bereits vom normalen Zeeman-Effekt bekannt ist (vgl. Gl.(19)). Aus spektroskopischer Sicht heißt das, dass Paschen-Back-Effekt und normaler Zeeman-Effekt identisch aussehen, auch wenn sich die Ursachen unterscheiden. Gemeinsam

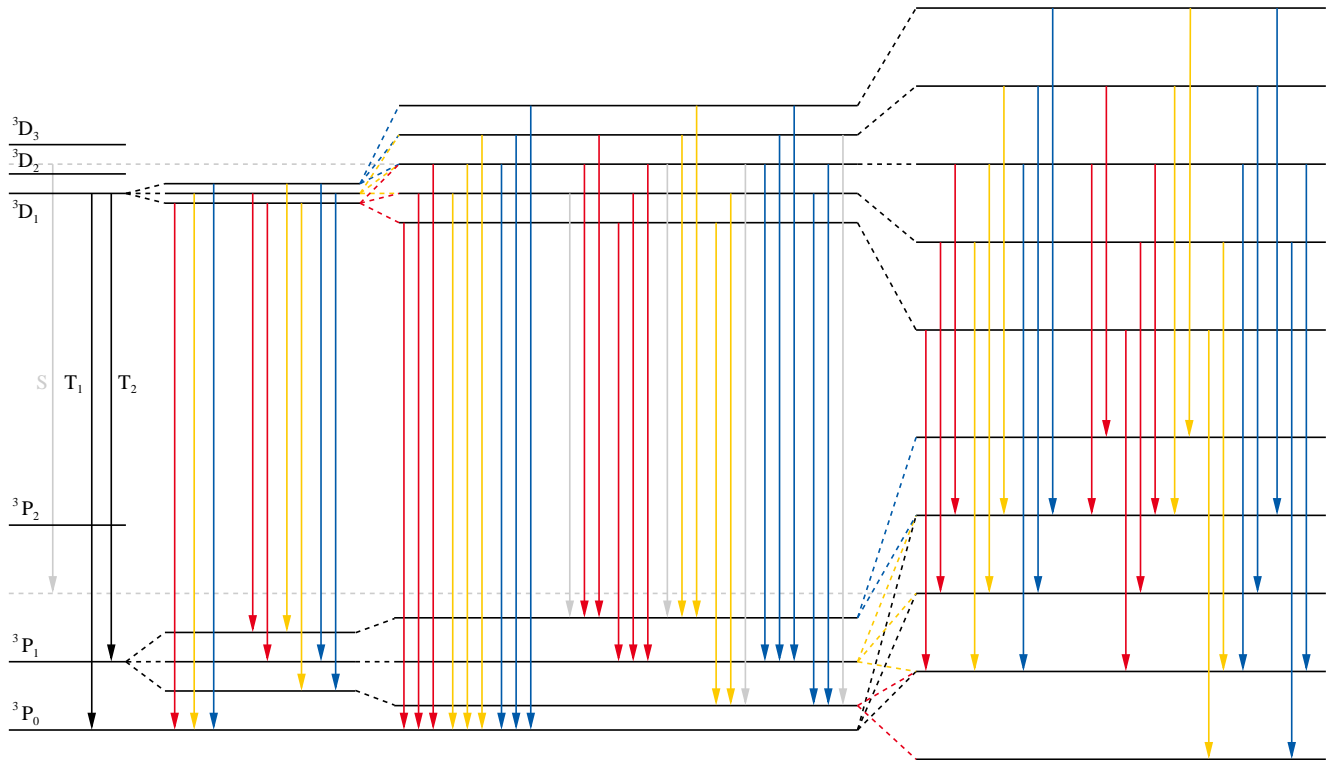


Abbildung 3: Termschema des Übergangs vom Zeeman-Effekt zum Paschen-Back-Effekt am Beispiel des Linien-Sextetts ${}^3D_{3,2,1} \rightarrow {}^3P_{2,1,0}$ von Helium. Zu Beobachten sind nur die Übergänge ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_0$ (T_1) und ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_1$ (T_2). Von Links nach Rechts: Die ungestörten Übergänge, der anomale Zeeman-Effekt, der Partielle Paschen-Back-Effekt und der Vollständige Paschen-Back-Effekt, bei dem die Feinstrukturaufspaltung vollständig aufgehoben ist. Im Grenzfall verbotene Linien sind grau dargestellt.

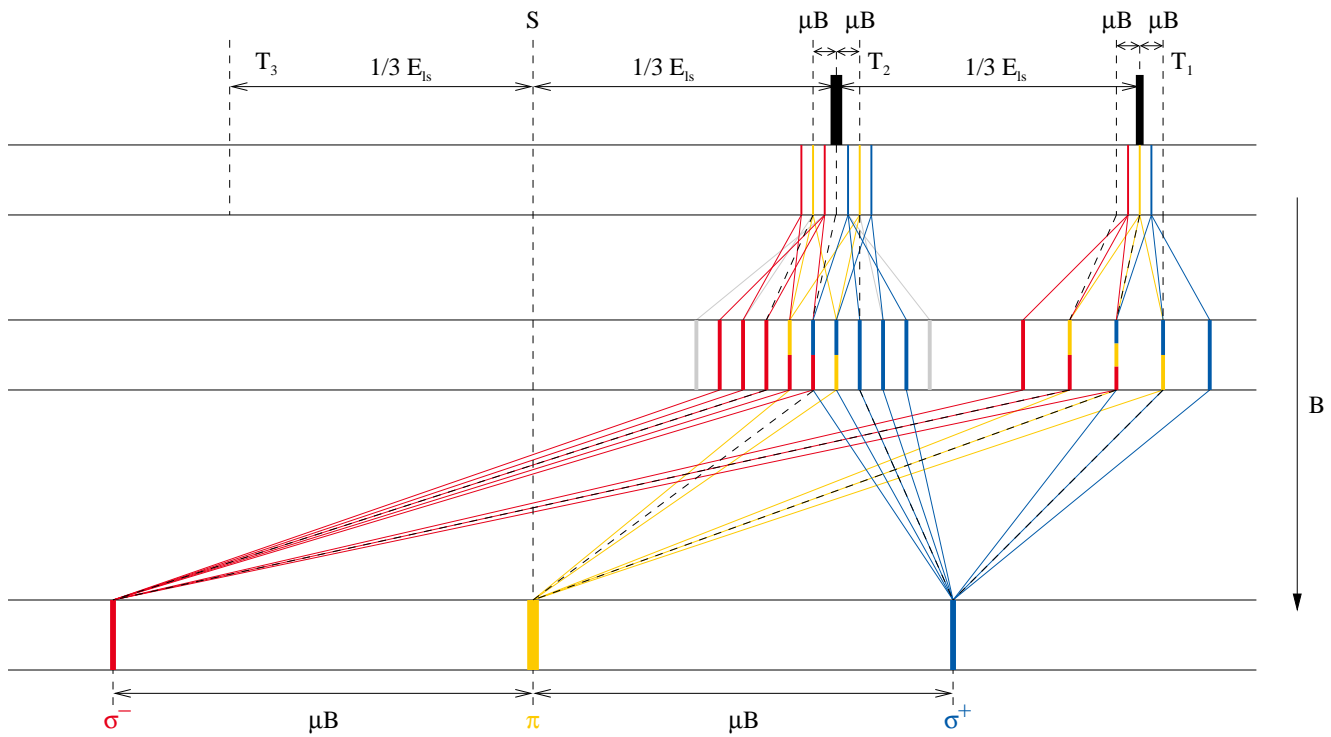


Abbildung 4: Spektrale Auftragung der Übergänge aus Abb. 3 Oben: Die ungestörten Übergänge und der anomale Zeeman-Effekt. Mitte: Partielle Paschen-Back-Effekt. Unten: Vollständiger Paschen-Back-Effekt. Im Grenzfall verbotene Linien sind grau dargestellt.

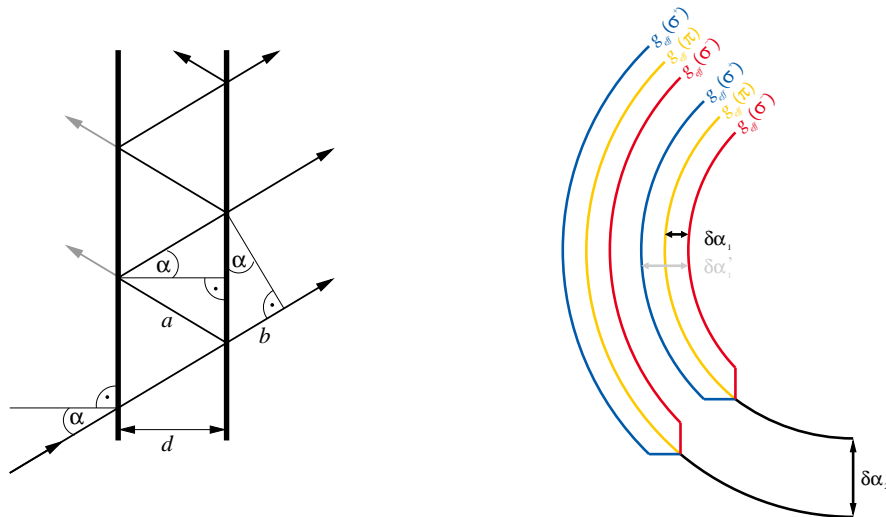


Abbildung 5: Strahlengang im Fabry-Pérot-Interferometer (links), Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld (rechts)

haben sie, dass jeweils nur das magnetische Moment des Gesamtbahndrehimpulses L für die Spektralübergänge eine Rolle spielt. Im Fall des Zeeman-Effekts tritt der Gesamtspin S nicht in Erscheinung, da er verschwindet. Im Fall des Paschen-Back-Effekts ist er unsichtbar, da er allen kein Photon emittieren kann.

5 Messung mit dem Fabry-Pérot-Interferometer

Im Versuch wird ein Fabry-Pérot-Interferometer mit festem Plattenabstand verwendet. Bei der Messung wird jedoch auf die direkte Bestimmung der Winkel verzichtet, da dies z.B. wegen der erforderlichen Eichmessung erheblichen Aufwand erfordern würde. Die Bestimmung von Winkelverhältnissen ist eine einfache Alternative. Nimmt man bei der Herleitung der Interferenzbedingung an, dass die Glasplattendicke zu vernachlässigen ist und dass das Fabry-Pérot-Interferometer mit Luft gefüllt ist, so ergibt sich für konstruktive Interferenz auf die Bedingung:

$$z \lambda = 2d \cos(\alpha) \quad z \in \mathbb{N}_0 \quad (24)$$

Betrachtet man jetzt Ringe in der Nähe der höchsten Interferenzordnung $z_0 = \lfloor 2d/\lambda \rfloor$, kann man den Winkel zwischen zwei Interferenzordnungen durch:

$$\Delta z \lambda = -2d \sin(\alpha) \delta\alpha_2 \quad (25)$$

nähern (siehe Abb. 5 rechts unten). Nach Anlegen eines Magnetfeldes ergibt sich eine Aufspaltung der Spektrallinien, wie sie in Abbildung 5 angedeutet wird. Der Winkel innerhalb einer Interferenzordnung zwischen zwei Spektrallinien lässt sich durch

$$z d \lambda = -2d \sin(\alpha) \delta\alpha_1 \quad (26)$$

angeben. Wird in der Nähe der höchsten Ordnung beobachtet, ergibt sich unter der Bedingung $z_0 \gg \Delta z$ mit $\Delta z = 1$ und $z \approx z_0$ nach Division von (26) durch (25) der Zusammenhang:

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} \approx \frac{1}{2d} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2} \quad (27)$$

Unter Verwendung von $E = hc/\lambda$ und $E = \mu_B B \Delta g_{\text{eff}}$ lässt sich somit die Beziehung für das Bohrsche Magneton herleiten.

$$\mu_B = \frac{hc}{2dB} \cdot \frac{\delta\alpha_1}{\Delta g_{\text{eff}} \delta\alpha_2}, \quad (28)$$

wobei Δg_{eff} die g_{eff} -Differenz der Spektrallinien ist, zwischen denen der Winkel $\delta\alpha_1$ gemessen wird.

6 Aufgaben

1. Überprüfen Sie die Vorhersagen der klassischen Erklärung.
2. Gehen Sie für die quantenmechanische Beschreibung wie folgt vor:
 - Berechnen Sie die Landéschen g -Faktor der beteiligten Energieniveaus.
 - Zeichnen Sie das Termschema mit allen möglichen Übergängen.
 - Berechnen Sie die g_{eff} -Werte der entsprechenden Übergänge.
 - Stellen Sie die Spektrallinien-Aufspaltung auf einem Energiestrahldar.
 - Überprüfen Sie Ihre Vorhersagen im Experiment.
3. Suchen Sie für jede der besprochenen Spektrallinien eine Magnetfeldstärke, bei der Sie das Winkelverhältnis $\delta\alpha_1/\delta\alpha_2$ gut bestimmen können und berechnen Sie aus den Messwerten das Bohrsche Magneton μ_B . Der Plattenabstand des Fabry-Pérot-Interferometer beträgt $d = 7.55\text{mm}$.

Bitte beachten:

Das Magnetfeld immer ausschalten, bevor der Geißlerröhre ausgeschaltet wird.

$$\begin{aligned}I_{max}(Magnet) &= 1.5\text{A} \\ I_{max}(Röhre) &= 23\text{mA}\end{aligned}$$